

## 25. Популяционные игры. Равновесие Нэша и строгое равновесие.

**Популяционная игра** - статическая модель взаимодействия в большой однородной группе индивидуумов.

$$G = \langle J, f_j(\pi, \omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \rangle,$$

- $J$  - множество стратегий участников игры;
- $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$  - распределение игроков по стратегиям;
- $\Pi = \{\pi | \pi_j \geq 0, \sum_{j \in J} \pi_j = 1\}$  - стандартный симплекс;
- $f_j(\pi, \omega)$  - выигрыш игроков, использующих стратегию  $j$  в зависимости от распределения по стратегиям  $\pi$  и других параметров модели  $\omega$  (например, общей численности популяции и состояния внешней среды);

**Равновесием по Нэшу** популяционной игры  $G$  называется такое распределение  $\pi^*$ , что всякая стратегия, используемая с положительной частотой, является оптимальным ответом на данное распределение при любом значении параметра  $\omega$ , т.е.

$$\forall \omega \in \Omega, \forall j \in J (\pi_j^* > 0) \Rightarrow j \in \operatorname{Arg} \max_{i \in J} f_i(\pi^*, \omega).$$

Если  $f_j(\pi, \omega) = \alpha(\pi, \omega) \bar{f}_j(\pi) + b(\pi, \omega)$ , т.е. функции выигрыша разложимы, то:  $\forall j \in J : \pi_j^* > 0 \rightarrow j \in \operatorname{Arg} \max_{i \in J} \bar{f}_i(\pi^*)$ .

**Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС)** для популяционной игры  $G$  называется такое распределение  $\pi^*$ , что

$$\forall \omega \in \Omega, \forall \pi \neq \pi^*, \exists \bar{\lambda}(\pi) \in (0, 1) : \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}(\pi)) f_{\pi^*}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega) > f_{\pi}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega), \text{ где } f_{\pi}(\pi', \omega) = \sum_{j \in J} \pi_j f_j(\pi', \omega) - \text{средний выигрыш смешанной стратегии, или распределения } \pi, \text{ если}$$

индивиды в популяции распределены по чистым стратегиям.

Понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия  $\pi^*$ , внедряется относительно небольшая группа "мутантов" с распределением по стратегиям  $\pi$ . Тогда, если распределение  $\pi^*$  является эволюционно устойчивым, то внедрявшаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной стратегии  $\pi^*$ .

Всякая ЭУС является равновесием Нэша. Действительно, если  $\pi$  не является равновесием, то мутанты с чистой стратегией лучшего ответа на  $\pi$  получают больший выигрыш, чем средний выигрыш в основной популяции. В силу непрерывности  $f$  относительно  $\pi$  это справедливо для любой достаточно малой группы таких мутантов. Данное утверждение справедливо, если доля отдельного индивида в популяции пренебрежимо мала в том смысле, что изменение его стратегии не влияет на значения функций выигрыша.

Уточним понятие ЭУС для взаимодействий в группах конечной численности, где изменение стратегии отдельного индивида влияет на значение функций выигрыша.

Для симметричной игры в нормальной форме с  $n$  игроками, множеством стратегий  $S$  и функцией выигрыша  $f_j(s_j, s_{-j})$  ЭУС определяется как симметричная ситуация  $s_j \equiv s$  такая, что при любом изменении стратегии отдельным игроком его выигрыш в новой ситуации будет не больше, чем выигрыш любого из остальных игроков, сохранивших прежнюю стратегию.

**Строгим равновесием популяционной игры  $G$**  называется такое распределение  $\pi^*$ , что все игроки используют одну и ту же стратегию, которая является единственно лучшим ответом на это распределение:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists j \in J : \pi_j^* = 1, \text{ и } \forall i \neq j, \forall \omega \in \Omega : f_j(\pi^*, \omega) > f_i(\pi^*, \omega) + \varepsilon.$$

Всякое строгое равновесие является ЭУС.